

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 7 Martie 2009

CLASA a VIII-a

Problema 1. Să se determine numerele reale pozitive x, y, z care verifică simultan egalitățile $x^2y^2 + 1 = x^2 + xy$, $y^2z^2 + 1 = y^2 + yz$ și $z^2x^2 + 1 = z^2 + xz$.

Problema 2. Numerele reale a, b, c, d, e au proprietatea că

$$|a - b| = 2|b - c| = 3|c - d| = 4|d - e| = 5|e - a|.$$

Să se arate că numerele a, b, c, d, e sunt egale.

Problema 3. Considerăm prisma patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$ în care $AB = a$, $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, iar M este mijlocul muchiei $B'C'$. Fie F piciorul perpendicularei din B pe dreapta MC . Să se determine măsura unghiului dintre planele (BFD) și (ABF) .

Problema 4. Numerele naturale a și b verifică relația

$$(a^2 - 9b^2)^2 - 33b = 16. \tag{1}$$

- Să se arate că $|a - 3b| \geq 1$.
- Să se determine toate perechile de numere naturale (a, b) care satisfac relația (1).